

FRATRE LUCA PACIOLI E SU DIVIN PROPORTION (IN INTERLINGUA¹)

Fábio Maia Bertato
Unicamp – Brasil

Resumo

Le ration de auro ha essite sempre subjecto de investigation e speculation per tote historia del mathematica. Le prime manuscripto dedicate exclusivamente super iste thema es denominate “De Divina Proportione”, obra del Fratre franciscan Luca Pacioli (1445-1514?). Pacioli es um importante persona in le historia del scientia e arte. Ille influentiava le mathematica, in particular in le campo algebraic e geometric, contabilitate, architectura, artes graphic, pictura, etc. In despecto de su obra plus celebre esser *Summa di Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, su obra favorita es *De Divina Proportione* (1498) dedicate al Duce Ludovico Sforza. Illo esseva inricchite per illustrationes de Leonardo Da Vinci. Iste obra esseva publicate in 1509 con un tractato de architectura, un tractato super polyhedros regular e un alphabeto basate super regulas del mathematica. Le objectivo de iste articulo es describer le

¹ Le logico e mathematico Giuseppe Peano (1858 - 1932) esseva le proponitor del prime interlingua le qual ille nominava “Latino sine Flexione”. Peano publicava iste lingua in le jornal *Rivista di Matematica*, tomo 8, no. 3, octobre 1903, pp. 74-83. Un exemplo de su Latino sine Flexione: “*Quum plure populo es in reciproco contacto, per ratione de politica, scientia et commercio, semper se manifesta necessitate de inter-lingua. Diverso populo, sub imperio Romano, adopta latino populare, qui es latino cum simplificatione de caso (Sec. 1)*”. In nostre articulo nos usa le Interlingua de “*International Auxiliary Language Association*”, IALA (Association pro le Lingua Auxiliar International).

contendo de iste texto original de Pacioli de 1498. Nos ha traducite iste obra in portugese con commentarios.

Parolas clave: Ration de auro, Mathematica in Renascentia, Geometria, Polyhedros, Italia.

Abstract

The golden ratio has always been a subject of speculation and investigation along the history of mathematics. The first known manuscript that its main theme is golden ratio is called *De Divina Proportione* (The Divine Proportion), written by the Franciscan friar Luca Pacioli (1445 – 1514?). Pacioli is an important person in the history of science and art. He influenced Mathematics, particularly in algebraical and geometrical field, Accounting through the Double-entry Bookkeeping, Architecture, Graphic Arts and Printing, Painting etc. Despite his more famous work *Summa di Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, his favorite work is *De Divina Proportione*. This work was enriched by Leonardo Da Vinci's illustrations. This work has been translated into Portuguese with commentaries to my PhD Thesis. The main purpose of this paper is to describe the contents of the original text about the Divine Proportion and to provide historical foundations on its contents.

Keywords: Golden ratio, Mathematics in Renaissance, Geometry, Polyhedra, Italy.

Frà Luca Pacioli



Le fratre italian Luca Pacioli nasceva in Borgo San Sepolcro in 1445. Anque Piero della Francesca nasceva e viveva in iste citate e Pacioli esseva discipulo e amico de iste importante artista. Pacioli manteneva contacto con Federico di Montefeltro, duce de Urbino, e con su filio Guidobaldo. Le progressos de Pacioli in Mathematica e altere scientias esseva troppo notabile que con solmente dece-novem annos ille esseva preceptor del filios de Antonio Rompiasi, un venetiano commerciante. In Venetia, ille poteva se disveloppar in le cognoscentia super commercio e spectar le lectiones de Domenico Bragadino.

In 1470, Pacioli scribeva un tractato de algebra, dedicate al tres filios de Rompiasi, e in iste epocha ille esseva a Roma, ubi ille remaneva como hospite de Leon Battista Alberti. Pacioli deveniva fratre in le Ordine del Franciscanos Minor, forsan per influentia de Alberti. Circa 1475 Pacioli scribeva un tractato de arithmetica. Durante su vita, Pacioli inseniava in diversos locos como in le Universitate de Perugia, in le Sapienza de Roma, in Napoli, in Padova, in Milano, in Zara², etc.

In Zara, Pacioli scribeva un altere tractato de algebra. In 1494, ille publicava su obra denominate *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalità*. Iste obra presentava al mundo le methodo del Partita Duplice e a causa de illo Pacioli es cognoscite como le “Patre del Contabilitate”.

² Actual Zadar, Croatia. In iste periodo, iste citate era territorial de Venetia.

Pacioli esseva membro del corte de Ludovico Sforza, duce de Milano, ubi ille cognosceva Leonardo Da Vinci. Illes se deveniva grande amicos e Leonardo consultava Pacioli super questiones del mathematica. In le decembre de 1498, Pacioli concludeva su obra *De Divina Proportione*, con 60 designos facite per Leonardo.

Quando le franceses vinceva Ludovico in le septembre de 1499, Pacioli e Leonardo fugiva e illes viveva in Firenze. In 1500, Pacioli esseva indicate pro inseniar geometria in le Universitate de Pisa, illo habeva essite transferite pro Firenze a causa del revolta de 1494. Postea Pacioli inseniava in Perugia e Bologna de novo.

Luca Pacioli faceva le prime traduction pro italiano del *Elementos* de Euclide, ille se ha basate super le version latin de Campanus. In 1509 su *Divina Proportione* esseva publicate per Paganino de' Paganini in Venetia. Iste version esseva publicate con altere duo partes e con le alphabeto paciolano.

Postea Luca Pacioli esseva elegite superior del Convento de Borgo San Sepolcro. Probabilmente ille moriva post 1514 proque existe datos super su vita usque 30 de agosto de iste anno.



Figura 1

Luca Pacioli com um alumno – Jacopo di Barbari

Le obra: De Divina Proportione

Le prime codice del *Divina Proportione* esseva concludite in 14 de decembre de 1498 e illo esseva dedicate a Duce Ludovico Sforza e postea altere esseva preparate pro Galeazzo da Sanseverino, general del duca. Le prime manuscripte es in le *Bibliothèque Publique et Universitaire* de Geneva e le secunde es in le *Biblioteca Ambrosiana* de Milano. Pacioli esseva amico e protegite de Pier Soderini, autoritate de Firenze, pro le quale ille donava possibilmente un tertie codice de su obra, hodie infortunatamente perdite.

Le contento original de istes codices es le mesme del opera complete publicate in 1509. Nos sape que Leonardo Da Vinci faceva le illustrationes pro iste libro per le proprie parolas de Pacioli:

“(…) *le parve libro denominate Divin Proportion. E con tante entusiasmo que io includeva in illo schemas facite per le mano de nostre Leonardo Da Vinci, pro facer illo plus instructive al vista*”. (Pacioli 1509, p. A ii recto)

Le texto del version publicate pote esser dividite in tres partes principal, ultra le alphabeto de Pacioli.

Le thema central del prime parte es le ration de auro le qual Pacioli appellava “Divin Proportion”. In iste parte on pote trovar un summario del propositiones del *Elementos* de Euclide que es relate al ration de auro, un studio del proprietates del polyhedros regular e le description de polyhedros semi-regular. In le initio le autor tractava del importantia fundamental e universal del mathematica, ille dava alicun detalios super le ambiente del Corte de Milano e super le prerequisites pro comprehension del obra. Iste parte habe un total de septanta-un capitulos. Nos debe observar que Pacioli recommendava al lector le uso del *Elementos* de Euclide como “guida indispensabile”. In iste articulo, nos tractara solmente del contento de iste prime parte del *Divina Proportione*.

Le secunde parte es un tractato de architectura basate in Vitruvius le qual considera mesuras e proportiones como regulas pro le constructiones del edificios e lor partes. Iste tractato esseva

inspirate in le desiderio del sculptores e architectos, pupillos de Pacioli, de applicar in lor obras le qual illes habeva apprendite super arithmetica e geometria. In iste tractato il ha vinti capitulos.

Le tertie parte es un traduction, del latino pro italiano, del *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* de Piero della Francesca. Iste obra contine un serie de casos e problemas super le polygonos, le polyhedros regular e altere polyhedros. In iste parte il ha circa 138 casos dividite in tres tractatos minor.

In le final del obra es le illustrationes del polyhedros, alicun illustrationes referente al architectura e le alphabeto presentate per Pacioli e que ille nominava “*alphabeto dignissimo antigo*”. Iste alphabeto esseva un tentativa de provider regulas e principios pro constructiones del litteras que italianos e estranieros trovava in le monumentos antique. Pacioli non copiava le alphabeto de Damianus Moyllus, publicate in 1480 e le manuscripto de Feliciano de Verona, concludite in 1482. Le fratre es un del primes que recercava proportiones e comparationes al corpore human e que utilisava unicamente le regula e le compasso pro inseniar al pupillos le reconstruction del inscriptiones.

Le libro esseva scripte in italiano e in illo il ha citationes e passages in latino. Illo es un obra facite con grande preoccupation de esser clar, objective e didactic. Lor fontes theoretic plus importante son le *Elementos* de Euclide, *Timeo* de Platon, le obras de Vitruvius, le ideas del neoplatonics florentin e alteres obras del Medioevo, del mundo classic e del Humanismo del epocha, le quales lor nomines non son mentionate explicitemente.

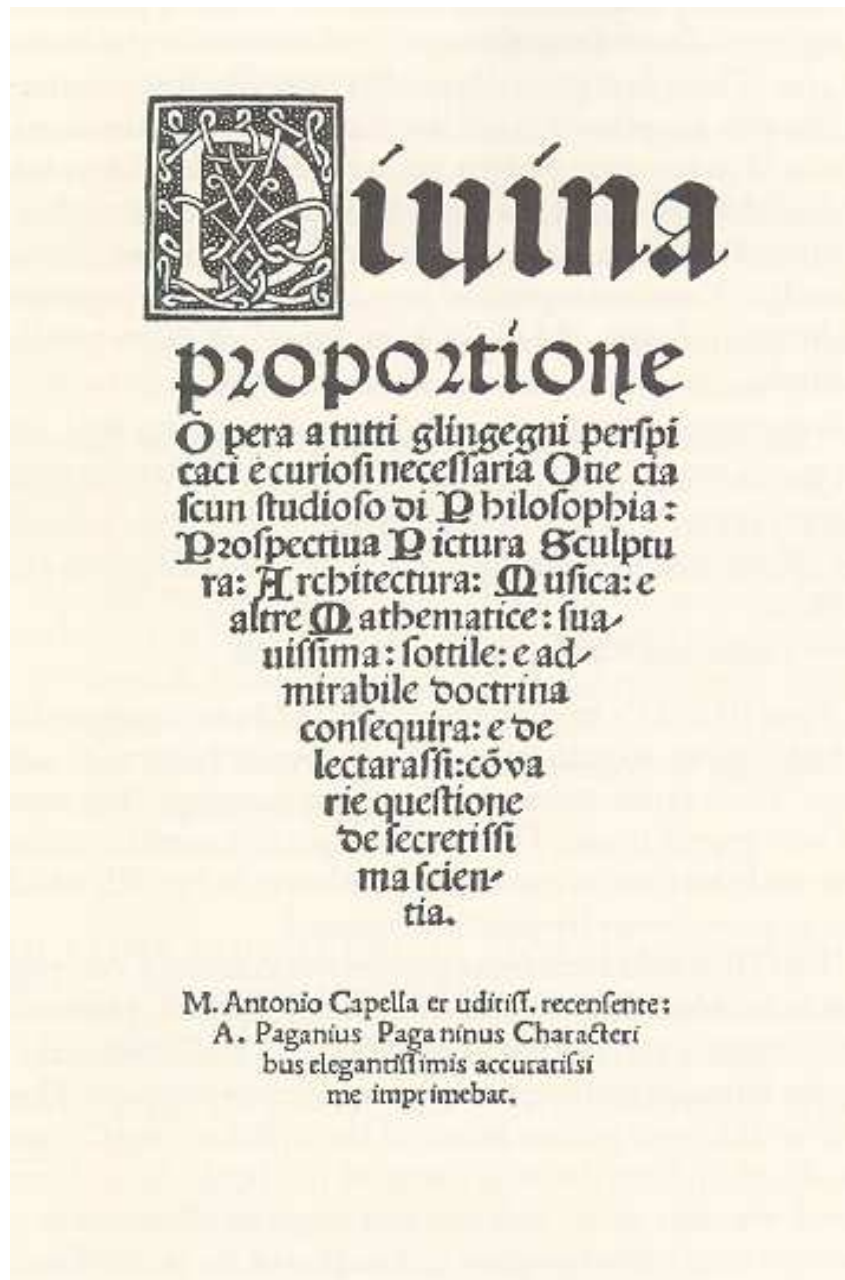


Figura 2

Prime pagina del *Divina Proportione* (1509)
Super le titulo del obra

Pacioli credeva que le ration de auro es un manifestation del Deo ipse. Ille affirmava que inter le similitudes que ille trovava, solmente quatro esseva sufficiente pro justificar su affirmation:

1 – Iste proportion (ration³) es un e nihil plus que un. Secundo le schola theologic e philosophic iste unitate es le epitheto de Deo.

2 – Correspondentia al Sancte Trinitate. Como *in divinis* il ha un unic substantia inter tres personas, id est, Patre, Filio e Spirito Sancte, equalmente un unic proportion (ration) de iste typo pote sempre esser trovate inter tres terminos.

3 – Como Deo non pote esser definite e ni pote esser comprehendite per parolas, anque iste typo de proportion non pote esser determinate per numero intelligibile e ni pote esser representate per numero rational.

4- Assi como Deo non pote cambiar, es omne in omne e es in tote le partes, iste proportion anque es invariabile in tote le quantitate.

Pacioli esseva adepto del idea platonic de que pro tote elemento del natura corresponde un polyhedro regular: foco/tetrahedro, terra/hexahedro, aere/octahedro, aqua/icosahedro e quintessentia/dodecahedro. Como le dodecahedro non pote esser formate sin le ration de auro, le fratre comparava le necessitate de iste ration pro formar iste polyhedro al necessitate de Deo pro crear e formar le universo.

³ In le epocha de Pacioli esseva costume nominar *proportio* le ration e *proportionalità* le proportione. Le termino *ratio* esseva dedicate specialmente pro ration como facultate intellectual.

Pacioli considerava le studio de iste Divin Proportion un cognoscentia de grande valor, forsan le plus grande valor. Pro iste theologo e mathematico iste *secretissime scientia* non poterea esser perditte post su morte. Pacioli affirmava que ille se ha inspirate in le assertion de Duca Ludovico Sforza:

“Vostre Altessa, con sus parolas de auro e de melle, diceva que es digne de tote consideration de Deo e del mundo, uno que dotate de alicun virtute, voluntarimente communica lo al alteres personas, e iste es, pro proxime, fonte de caritate, e de laude e honor pro se.” (Pacioli 1946, p. 60)

Secundo Pacioli, ille reteneva iste parolas in le mente, proque “jammais existeva in marmore inscription plus durable”.

Le “effectos” del Divin Proportion

Le proprietates presentate inter le capitulos VII e XXIII son nominate “*effecti*” (effectos) del Divin Proportion. Le autor affirmava que existe infinitos effectos, totevia, ille eligeva dece-tres “*in honor del gruppo del dece-duo e del su maestro, Nostre Senior Jesus Christo*” (Pacioli 1509, p.7 verso). Istes effectos son exactemente le prime propositiones del Libro XIII del *Elementos* de Euclide, sin demonstrationes e sin exemplos numeric. Cata uno del effectos recipeva un nomine particular: *prime, essential, singular, ineffabile, admirabile, innominabile, reciproc del precedente, inestimabile, excelse, supreme, excellentissime, incomprendibile e dignissime.*

Le Polyhedros Regular (exactemente cinque *ad decorem universi*)

In le capitulos XXIV usque XXXI, il ha un studio super polyhedros regular e le demonstration del existentia de solmente cinque de istes solidos. Pacioli usava anque un argumento mystic:

“Le corpores de iste typo, denominate regular possede lateres, angulos e bases equal, e un es continite exactemente per le altere, como essera demonstrate, e illos son in correspondentia al cinque corpores simplice del natura: terra, aqua, aere, foco e quintessentia, id est, virtute celeste que sustenta in su esser omne le altere. E como istes cinque simplices son sufficientes in le natura, proque al contrario, es un argumento que Deo provide in excessu o in defecto al necessitate natural, le qual es un absurde, (...), le mesmo occorre al formas de iste cinque corpores”. (Pacioli, 1946, p.85)

In le capitulos XXXIV usque XLV, il ha un studio de le inscripciones del polyhedros regular in alteres polyhedros regular:

Capitulo XXXIV - “Octahedro inscribite in le tetrahedro”

Capitulo XXXV – “Como se forma e se pone in le cubo le tetrahedro”

Capitulo XXXVI – “Inclusion del octahedro in le cubo”

Capitolo XXXVII – “Super le construction del hexahedro in le octahedro”

Capitolo XXXVIII – “Super le inscription del tetrahedro in le octahedro”

Capitolo XXXIX – “Super le formation del dodecahedro in le icosahedro”

Capitolo XL – “Super como poner le icoaedro in le dodecahedro”

Capitolo XLI – “Super como poner le cubo in le dodecahedro”

Capitolo XLII – “Como se forma le octahedro in le dodecahedro”

Capitolo XLIII – “Super le inclusion del tetrahedro in le dodecahedro”

Capitolo XLIV – “Construction del cubo in le icosahedro”

Capitolo XLV – “Super como formar le tetrahedro in le icosahedro”

Istes propositiones son trovate in le libros XIV e XV de pseudo-autorato de Euclide. Como es sapite, tote le polyhedros regular pote esser inscripte in le dodecahedro. A causa de iste facto, le fratre affirmava, Platon attribueva al dodecahedro le correspondentia al universo.

Le altere corpores

In le capitulos XLVIII usque LIII, Pacioli describeva varie polyhedros, inter le quales alicun son semi-regular. Tales descriptiones son accompagniate de un enumeration correspondentente al illustrationes que se trova in le final de texto.

In general, in le texto de *Divina Proportione*, le polyhedros que son obtenite per alicun processo de trincar le corpores regular, son nominate *Abscisus*, le obtenite per le processo de composition (stellate) *Elevatus* e le regular *Planus*. Le corpores solide son nominate *Solidus* e le “skeletalos” *Vacuus*. Cinque del polyhedros de Archimedes e le *Stella Octangula* de Kepler son inter le illustrationes de iste libro. Iste ultime polyhedra es nominate *Octahedron Elevatum Solidum* per Pacioli⁴.

Solides e constructiones de edificios

In le capitulo LIV, Pacioli tractava del polyhedro cognoscite actualmente como Sphera de Campanus (Figura 3). Iste polyhedro es formate per 48 facies quadrilateral non-regular e per 24 triangulos isoscele. Iste corpore es clasificata como non-dependente, id est, non se pote obtener lo a partir del regulares.

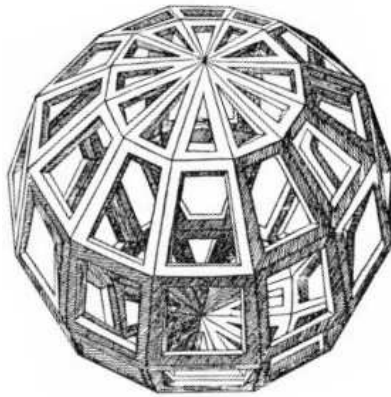


Figura 3

Le autor declarava que iste corpore esseva frequentemente utilisate per le architectos contemporanee in le edificaciones,

⁴ In le nomenclatura del polyhedros e colonnas il ha variationes inter le version impremite e le manuscripto, ubi on trova *Octocedron Elevatus Solidus*.

proque su forma se revela de grande utilitate pro construction de tribunas, abobodas o celos. Pacioli afirmaba que le Pantheon, in Roma, le Ecclesia de *San Satiro* (o *Santa Maria presso San Satiro*) e le tribuna del altar *Maggiore* de *Santa Maria delle Grazie*, in Milano, esseva construite inspire in iste corpore de 72 facies.

Secundo González, iste capitulo es illo ipse un parve tractato de architectura e que tal affirmationes

“non son poco sorprendente, proque un attentive examine del referite edificios non permette un verification literal con le manifestate in le texto. E iste se tractarea de un del plus grande novitates pro nostre cognoscimento del teoría architectonic del Renascentia”. (Pacioli, 1991, p. 24)

Le fratre attaccava le “architectos moderne” que, secundo ille, ignorava le obra de Vitruvius e imbarcava in un arte que illes non cognosceva. Ille affirmava que anque le sartor⁵ e le bottinero utiliza le geometría sin lo saper, e tote le classe de obreros, proque como ille ha dicite, “omne es numero, peso e mesura”⁶.

Es possibile que Pacioli se refereva a un gruppo specific de architectos ben cognoscite, per exemplo le gruppo (stilo gothic) responsabile per le ruinas in le obras realisate in Milano durante le dominio de Ludovico Sforza. Le autor affirmava que per le errores de alicun constructores, le costos pro reparation e reconstruction son plus grande que le costos pro construction e que tales individuos “*se ha denominate architectos e jammais*

⁵ Sartor = Alfaiate, tailor.

⁶ “*omnia consistunt in numero, pondere et mensura*”. Citation del libro del Sapientia 11, 20. In le Vulgata Sap. 11, 21: “*...sed omnia mensura et numero et pondere disposuisti*”.

illes videva ni le cappas del eccellente volumine de nostre digno architecto e grande mathematico Vitruvius”.

Usque le capitulo LXV il ha un studio super pyramides e colonnas e in capitulos sequente super le calculationes del volumes de iste solidos⁷.

In le capitulo LXIX, Pacioli explicava que esseva suficiente le contento super le corpores e que altere resultatos pote esser trovate in su *Summa*. In iste capitulo ille face bastante elogios al persona de Ludovico Sforza:

“E que plus pote esser dicite hodie de Vostre Altessa, si non que es inter le mortales le unic conforto e tranquillitate, non solmente in Italia, ma de tote le Christianitate? Pro totes vos revela grande, splendide e magnanime (...) Vostre Altessa es complitor fidel del Religion e non solmente restaurator, ma anque fundator de templos (...)”. (Pacioli, 1991, p. 125)

Le franciscano peteva que le lector non attribue le discurso al adulation, proque non es de *“adular tanto per le natura, como per le profession”*. In le capitulo LXX, le autor explicava como trovar le illustrationes con le numeros correspondente e in le sequente on trova un parve vocabulario de terminos utilisate.

⁷ Pro calcular le volume de un cylindro, Pacioli describeva le methodo: *“Trova le diametro del base e multiplica per se ipse; del producto, prende le 11/14 e multiplica per le altor del colonna. Iste ultime es le massa del corpore de tote le colonna”* (Pacioli, 1991, p. 115).



Figura 4
La Madonna col bambino - Piero della Francesca

Post le “*FINIS*”, in le version manuscripto, on trova le versos:

*“Corpora ad Lectorem
El dolci fructo vagho e si delecto
Constringe gia philosophi cercare
Causa de noi che pasci l’intellecto*

Disticon

*Quaerere de nobis fructus dulcissimus egit
Philosophus causam mens ubi leta man (et)*

A 14 de decembre, in Milano, in nostre convento, governante tote le provincia le Reverendo Patre Francesco, professor de Sacra Theologia, digno ministro. MCCCCLXXXVIII, in le septime anno del pontificato de Alexander VI”

Le poesia, que anque on trova in un manuscripte de Leonardo Da Vinci, con variationes in le scripto, on trova in le initio del version publicate in 1509, conjunctemente con alteres. In iste ultime, in corpore con le prime, on trova le secunde parte, que tracta de architectura e post es le traduction del *Libellus* de Francesca, le alphabeto paciolano e le xylogravuras baseate super le illustrationes de Leonardo. Nos non tractara de iste partes, proque illos fugi del scopo de iste articulo.

Considerationes final

On pote affirmar que Frà Luca Pacioli contava con grande prestigio inter su contemporaneos, tanto per le illustre individuos al quale se ha relationate, inter illes Leonardo da Vinci, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Jacopo de Barbari, le cortes de Milano e Urbino, etc, como per le locos ubi ille inseniava, habitava o sojornava, como Perugia, Venetia, Padova, Milano, Firenze e Roma, etc. De facto, Pacioli esseva considerate un optime professor e expositor. Tal esseva su fama que ille esseva portraitate inseniante super polyhedros (Figura 1) e in un celebre pictura de Piero della Francesca (Figura 4).

Le fratre non economisava elogios a su protectores e amicos, anque non economizava criticas a illes qui ignorava le cognoscentia que ille credeva esser indispensabiles pro qualcunque individuo. Per su formation e stilo, Pacioli necessitava presentar un conjuncto de ideas e revelar tote le “*mysterium*” del contento de su obra.

Ultra le contento mathematic, ille presentava su conception mystic, con citationes de philosophos e autores del Antiquitate Classic e del Patristica e memorias personal. Su vision mystic concordava al ambiente de le Renascentia. Le contento de su obra, conjunctemente con sus ideas, creava un climate de “Geometria Sacre”, que tanto interessava al artistas del epocha e, in iste contexto, Maestro Luca se deveniva le “sacerdote del mathematica”. Tal cognoscentias attraheva Albrecht Dürer que desiderava iste “*secretissime scientia*”. Anque on pote dicer que le *Divina Proportione* esseva scripte pro esser un obra de accessibile lectura e de consulta rapide quando necessari.

Nos conclude con citationes de Portoghesi e Pacioli:

“es evidente que le brillante professor, le studiose de mathematica, non poterea se contentar in scriber un simplice manual de uso practic”. (Portoghesi, 1957)

“proque quanto plus personas leger lo, plus grande fructos dara” (Pacioli, 1946, p. 54)⁸

Bibliographia

ALBERTI, L. B., *Da Pintura*. Trad. Antonio da Silveira Mendonça. Campinas: Ed. Da Unicamp, 1989.

ARCHIMEDES, *Measurement of a Circle*. In Great Books of The Western World. 2nd ed., vol. 10. Chicago: Enciclopedia Britannica, 1993.

BERTATO, F.M.; *A obra “De Divina Proportione” (1509) de Frà Luca Pacioli*. In Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática, SBHMat, Rio Claro, 2003.

BERTATO, F.M.; *Frà Luca Pacioli and his “Divine Proportion”*. In Proceedings – History and Pedagogy of Mathematics. Uppsala, 2004.

CARDANO, GIROLAMO, *Ars Magna or the Rules of Algebra*. New York: Dover Publ., 1968.

EUCLID; *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Tradução por: Sir Thomas L. Heath. 2^a ed., 3 vol. New York: Dover Pub.

KLINE, Morris, *Mathematics for Liberal Arts*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1967.

MORISON, Stanley; *Pacioli's Classic Roman Alphabet*. Dover, New York, 1994.

⁸ Le prime version de iste articulo esseva publicate in portugese in le *Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática*, 2003. Nos regratia a Ramiro Barros de Castro e Gilson Villas Bôas Passos del **UBI** (Union Brazilian pro Interlingua - <http://www.interlingua.org.br>) per le revision del texto.

- PACIOLI, Luca; *De Divina Proportione*. Veneza, 1509.
- PACIOLI, Luca; *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalità*. Veneza, 1494.
- PACIOLI, Luca; *La Divina Proporción*. Ed. Losada, Buenos Aires, 1946.
- PACIOLI, Luca; *La Divina Proporción*. Akal, Madrid, 1991.
- PORTOGHESI, P., *Luca Pacioli e la "Divina Proportione"*. In *Civiltà delle machine*, 1957, pg. 22-28.
- SMITH, David, E.; *History of Mathematics*. New York: Dover, 1958.
- TAYLOR, R. Emmett; *No Royal Road: Luca Pacioli and His Times*. Arno Press, New York, 1980.
- VALLE, Francisco; *Frà Luca Pacioli e seu Tratado de Escrituração de Contas*. Ed. Atlas, São Paulo, 1966.
- DA VINCI, Leonardo; *Tratado de Pintura*. Madrid: Akal, 1986.
- VITRIVIVUS POLLIO, MARCO; *I dieci libri dell'architettura di m. vitruvius*. Veneza: f. de franceschi sense, 1584.

Fábio Maia Bertato - Universidade
Estadual de Campinas
E-mail: fmbertato@cle.unicamp.br